Matematik för ingenjörer



Emir Sahraoui

Kapitel 1. Bråk

Uppgift 1. Förenkla

Exempel 1: för att man ska kunna addera eller subtrahera bråktal måste nämnare vara lika stor, sedan kan vi lägga talet på ett gemensamt bråkstreck och adderar de båda termernas täljare.

$$\frac{3}{2}+\frac{2}{6}\rightarrow\frac{3\cdot3}{3\cdot2}+\frac{2}{6}\rightarrow\frac{9}{6}+\frac{2}{6}\rightarrow\frac{9+2}{6}\rightarrow\frac{11}{6}$$

a) $\frac{4}{7}+\frac{2}{7}$ b) $\frac{11}{18}+\frac{5}{18}$ c) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ d) $\frac{2}{3}-\frac{1}{15}$

e) $\frac{5}{7}+\frac{2}{7}$ f) $\frac{1}{10}+\frac{8}{10}$ g) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ h) $\frac{2}{3}-\frac{2}{8}$

i) $\frac{5}{3}-\frac{2}{6}$ j) $\frac{2}{5}+\frac{7}{10}$ k) $\frac{4}{3}-\frac{4}{4}$ l) $\frac{2}{4}-\frac{5}{8}$

Uppgift 2. Föränkla

*Exempel 2: för att man ska kunna multiplicera bråktal behöver nämnare **INTE** vara lika stor, man multiplicera täljare och nämnare separat sedan förenklar man talet så långt det går.*

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\rightarrow\frac{2\cdot5}{3\cdot6}\rightarrow\frac{10}{18}\rightarrow\frac{5}{9}$$

a) $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}$ b) $5\cdot\frac{2}{6}$ c) $\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}$ d) $\frac{4}{5}\cdot2$

$e)\ \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3}$ $f)\ \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$ $g)\ \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7}$ $h)\ \frac{2}{6} \cdot 4$

$i)\ \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3}$ $j)\ \frac{10}{1} \cdot \frac{1}{2}$ $k)\ \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5}$ $l)\ \frac{2}{2} \cdot \frac{7}{4}$

Uppgift 3. Förenkla

*Exempel 3: för att man ska kunna dividera bråktal behöver nämnare **INTE** vara lika stor, man behåller första talet som den är och vrider andra bråktalet där täljare blir nämnare sedan man multiplicera som tidigare uppgift.*

$$\frac{3}{2} / \frac{2}{6} \rightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{2} \rightarrow \frac{3 \cdot 6}{2 \cdot 2} \rightarrow \frac{18}{4} \rightarrow \frac{9}{2}$$

$a)\ \frac{3}{2} / \frac{2}{6}$ $b)\ 2 / \frac{2}{3}$ $c)\ \frac{2}{1} / \frac{4}{3}$ $d)\ \frac{2}{2} \cdot 3$

$e)\ \frac{5}{2} / \frac{5}{3}$ $f)\ \frac{4}{3} / \frac{3}{2}$ $g)\ \frac{1}{2} / \frac{6}{3}$ $h)\ \frac{4}{6} / 3$

$i)\ \frac{5}{5} / \frac{3}{2}$ $j)\ \frac{4}{2} / \frac{6}{4}$ $k)\ \frac{1}{2} / \frac{5}{1}$ $l)\ \frac{1}{8} / \frac{8}{1}$

Uppgift 4. Föränkla

Exempel 4: för att man ska kunna addera, subtrahera, multiplicera och dividera flera bråk måste man tänka på prioriteringsregler bråktal ska man tänka på att multiplikation och division alltid ska komma före addition och subtraktion.

$$\frac{4}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\rightarrow\frac{4\cdot1}{2\cdot4}+\frac{5}{8}\rightarrow\frac{4}{8}+\frac{5}{8}\rightarrow\frac{4+5}{8}\rightarrow\frac{9}{8}$$

a) $\frac{4}{4}+\frac{2}{2}-\frac{2}{1}$ b) $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}$ c) $\frac{4}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{5}{8}$ d) $\frac{4}{2}/\frac{1}{4}-\frac{3}{3}$

e) $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{1}$ f) $\frac{2}{5}-\frac{2}{2}/\frac{5}{2}$ g) $\frac{8}{2}-\frac{1}{3}-\frac{2}{4}$ h) $\frac{0}{2}/\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{3}$

Uppgift 5. Lös problemet

a) Du har till uppdrag att blanda ihop betong för gjutning av ett betongbjälklag. I receptet står det att blandningen ska bestå av $\frac{7}{10}$ ballast (grus och sand), $\frac{4}{20}$ cement och resten ska bestå av vatten.

Hur många andelar vatten ska det vara och hur stor mängd vatten blir det ifall du ska blanda $10m^3$ betong?

b) Ni ska utföra ett schaktarbete för en markentreprenör där man ska schakta bort $\frac{2}{7}$ med vakuumschaktning för inte skada trädrötter, sedan ska ni gräva bort $\frac{9}{21}$ med grävmaskin och resen ska man gräva bor manuellt då vi inte har bra ledningsunderlag och det finns risk för att skada en ledning, hur många andelar måste man schakta bort manuellt?

Kapitel 2. Algebraisk uttryck:

Uppgift 1. Förenkla

$a)\ (a+b)^2$ $b)\ (a-b)^2$ $c)\ 2x+3(a+b)^2$

$d)\ -2(a+b)^2$ $e)\ 5+(ba-b)^2$ $f)\ 2x-3(b-a)^2$

$g)\ (a+b)(a-b)$ $h)\ (a+b)-(a-b)$ $j)\ (b-a)^2-ab+a^2$

Uppgift 2. Förenkla

$a)\ 6-4x-2+2x$ $b)\ 18-2(3x+5)$ $c)\ x(x+5)+3x^2-4x$

$d)\ 4x+3x+6-2$ $e)\ 5a+3-a+4$ $f)\ 6-10x-4+2x$

$g)\ (5x-2y)+(2x+y)$ $h)\ (3x-2y)+(4x-2y)$ $i)\ 9y-(5y+3)$

$j)\ 4(x+2)+2$ $k)\ 3x-2(5+x)+12$ $l)\ 5-(-2a+3)+4(1-a)$

$m)\ x(x+3)-2x$ $n)\ 5x-5+3x^2-3x$ $o)\ x\cdot x-x^2+2x^2$

Uppgift 3. Lös ekvation.

$a)\ x + 18 = 45$ $b)\ x - 29 = 17$ $c)\ 7x = 119$

$d)\ 2x + 8 = 22$ $e)\ 106 = 15 + 7x$ $f)\ 9 + 3x = 30$

$g)100 + 4x = 400$ $h)\ 19 = \frac{-9.5x}{3}$ $i)\ 7x = 3x + 36$

$j)\ x - 75 = 6x$ $n)\ 9 + 3x = 30$ $l)\ 17 - 3x = 5$

$p)\ 12 + \frac{44}{x} = 100$ $q)\ 5y = 2(y - 3)$ $r)\ x - 2(3 - 2x) = 9$

$s)\ \frac{x-5}{12} = \frac{2}{3}$ $t)\ 14 - 2x = 68 - x$ $u)\ \frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{5ab} = 24$

Uppgift 4. Lös ekvation

---

a) $x^2 + 6x + 8 = 0$ b) $x^2 - x - 6 = 0$ c) $x^2 - 9 = 0$

d) $x^2 + 3x - 4 = 0$ e) $x^2 + 7x + 12 = 0$ f) $x^2 - x - 2 = 0$

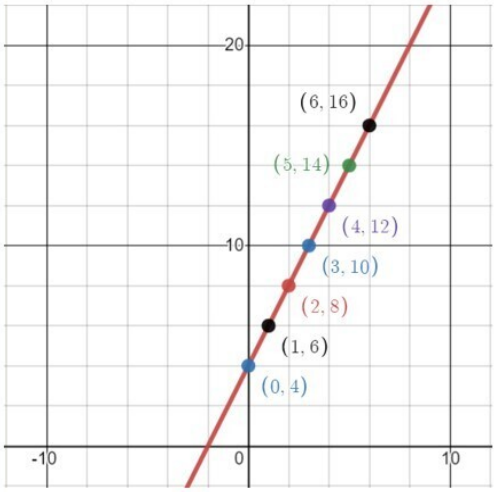
g) $x^2 - 6x + 8 = 0$

Kapitel 3. Funktioner och grafer (rättlinjeekvation):

Uppgift 3, Uppgft1, Rita grafer

Exempel 1: f(x)=2x+4, 0≤ x ≤6
Börja med att beräkna funktionens värde inom det angivna intervallet. Rita därefter ut punkterna i ett koordinatsystem och dra sedan en linje mellan de utritade punkterna.

$f(0) = 2 \cdot 0 + 4, \rightarrow f(0) = 0 + 4 = 4$
$f(1) = 2 \cdot 1 + 4, \rightarrow f(1) = 2 + 4 = 6$
$f(2) = 2 \cdot 2 + 4, \rightarrow f(2) = 4 + 4 = 8$
$f(3) = 2 \cdot 3 + 4, \rightarrow f(3) = 6 + 4 = 10$
$f(4) = 2 \cdot 4 + 4, \rightarrow f(4) = 8 + 4 = 12$
$f(5) = 2 \cdot 5 + 4, \rightarrow f(5) = 10 + 4 = 14$
$f(6) = 2 \cdot 6 + 4, \rightarrow f(6) = 12 + 4 = 16$



a) $f(x) = 3x + 6,\ 0 \leq x \leq 6$

b) $f(x) = 4 - x,\ -2 \leq x \leq 7$

c) $f(x) = 5x - 10, 0 < x \leq 3$

d) $f(x) = 2x + 5,\quad 0 \leq x \leq 6$

e) $f(x) = x^2 - x,\ 0 \leq x < 8$

f) $f(x) = 2x - x^2,\ 0 \leq x \leq 5$

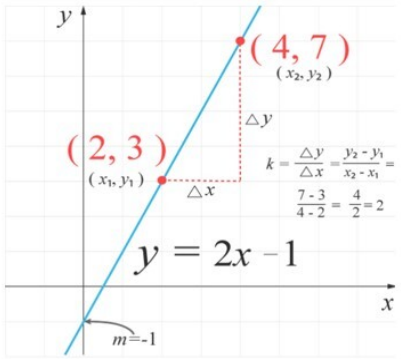
g) $f(x) = 2{,}6 - 2{,}4x,\ 0 \leq x \leq 8$

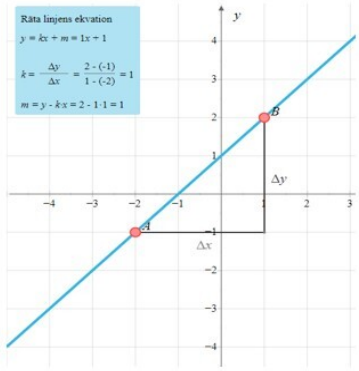
h) $f(x) = 6 \cdot 1{,}02^x,\ 0 \leq x \leq 5$

Kapitel 3. Funktioner och grafer (rättlinjeekvation):

Uppgift 2. Bestäm y=f(x)

För en linjär funktion gäller att alla punkter som tillhör funktionen återfinns längs en rät/rak linje. I stort sätt alla räta linjer kan beskrivas med ett matematiskt samband, en formel, som kallas för den räta linjens ekvation. Det är detta samband vi ska presentera mer ingående i denna lektion. För en rät linje skriven på formen y=kx+m anger konstanten k lutningen för linjen, Värdet på m kan vi läsa av i skärningspunkten mellan y-axeln och grafen alternativ beräkna dess värde med hjälp av en punkt och linjens lutning.





a) $f(x) = 15 - 2x$, $f(3) = ?$

b) $f(x) = 37x - 5x$, $f(5) = ?$

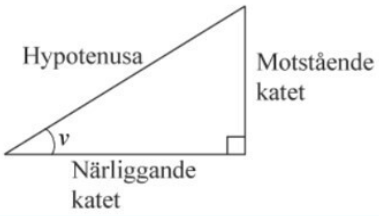
c) $f(x) = 37x + 5x$, $f(-5) = ?$

d) $f(x) = 5x + 12x$, $f(3) - f(2) = ?$

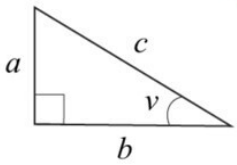
e) $f(x) = 6x + 15x$, $f(3) - f(2) = ?$

Kapitel 4. Tregonometri

Trigonometri är läran om sambanden mellan vinklarna och triangelns sidor. Till en början nöjer vi oss med att studera sambanden i rätvinkliga trianglar för att senare utvidga satserna till att möjliggöra beräkningar i samtliga trianglar.
Sambanden har en mängd olika användningsområden inom naturvetenskapen som exempelvis att kunna mäta avstånd mellan planeter och höjder på berg eller hus. Det har i lantmäteriet använts för att mäta avstånd och förstå hur byggnader och vägar skall konstrueras. När man sedan utvidgar den geometriska trigonometrin till att omfatta även trigonometriska funktioner så ökar användningsområdena ännu mer. Då kan dessa matematiska begrepp även beskriva växelström, ljudvågor eller pendlingar.



Kvoten $\frac{a}{c}$ kallas "*sinus för v*"



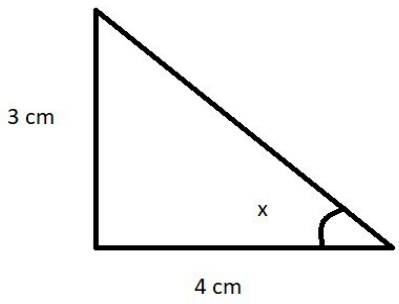
$$\sin v = \frac{a}{c}$$

$$\cos v = \frac{b}{c}$$

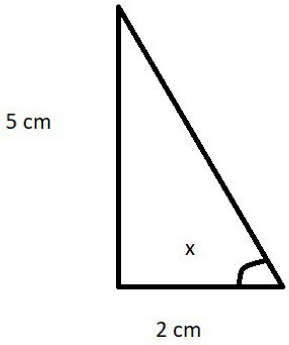
$$\tan v = \frac{a}{b}$$

Beräkna vinkel eller längden x.

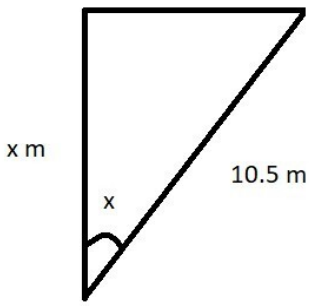
a)



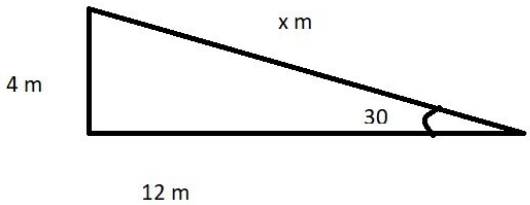
b)



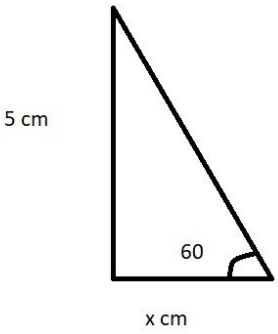
e)



c)

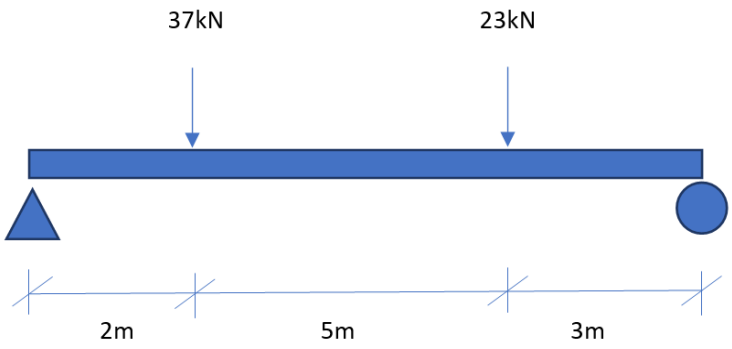


d)

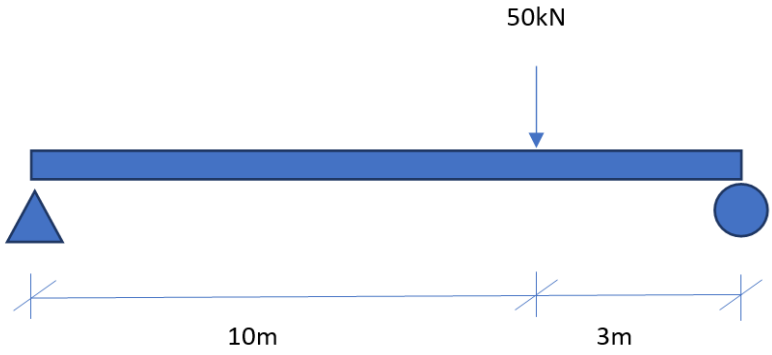


Konstruktions del , övningsblad 1

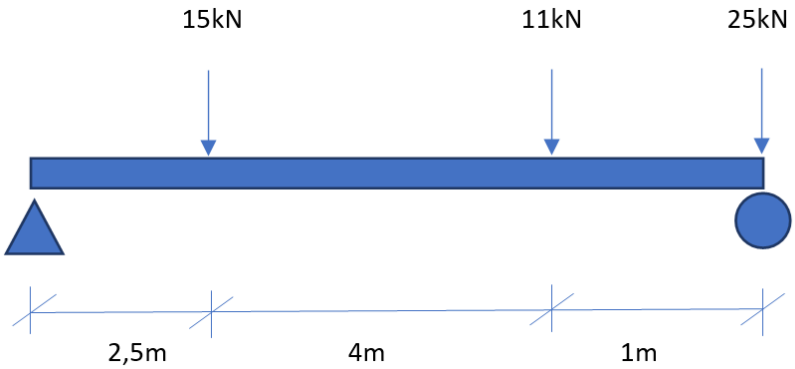
- *Uppgift 1) Beräkna stödreaktionerna*



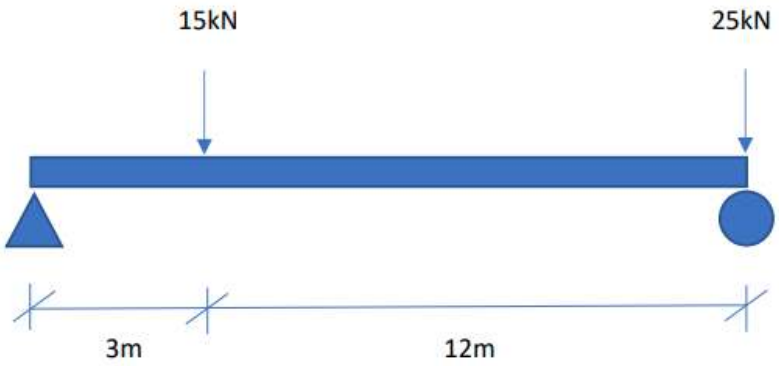
- *Uppgift 2) Beräkna stödreaktionerna*



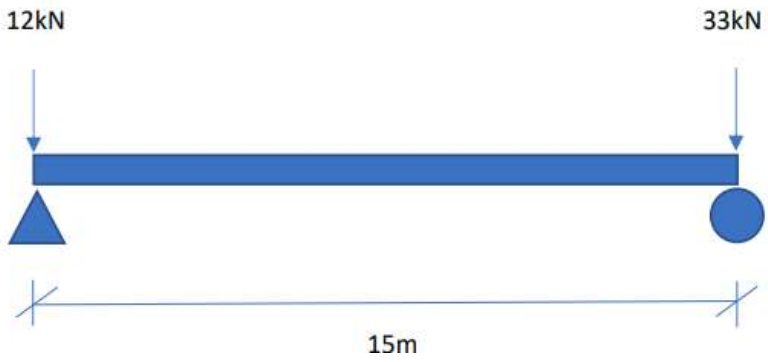
- *Uppgift 3) Beräkna stödreaktionerna*



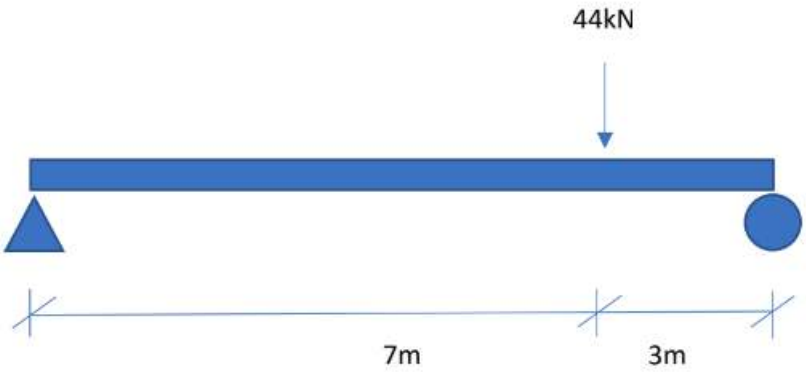
- *Uppgift 4) Beräkna stödreaktionerna*



- *Uppgift 5) Beräkna stödreaktionerna*

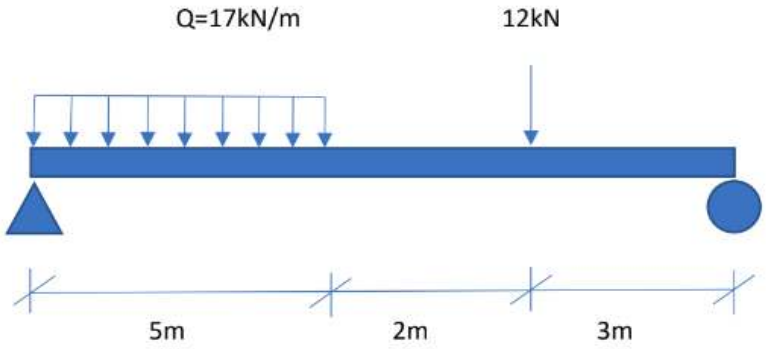


- *Uppgift 6) Beräkna stödreaktionerna*

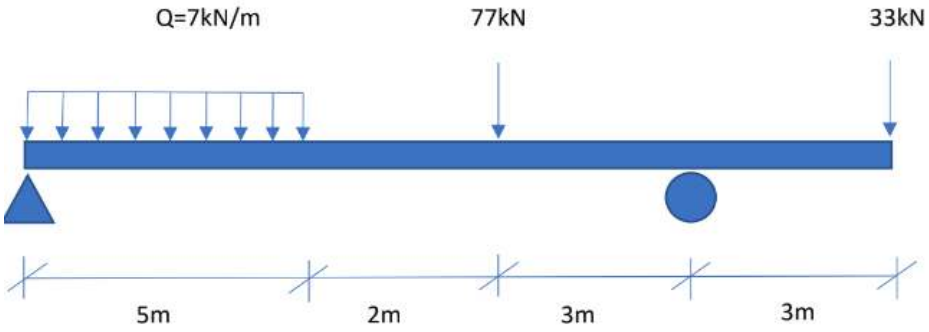


Övningsblad 2

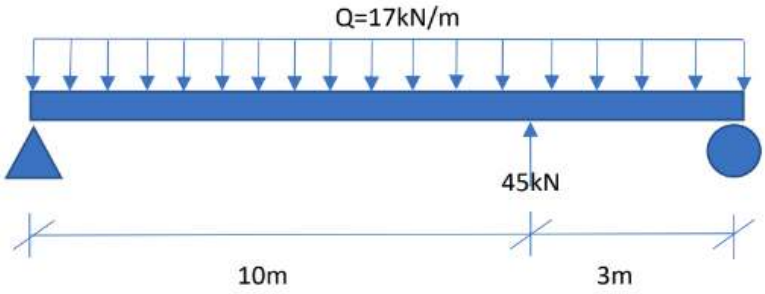
- *Uppgift 1) Beräkna stödreaktionerna*



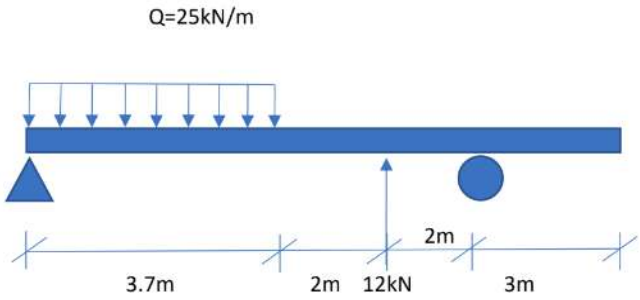
- *Uppgift 2) Beräkna stödreaktionerna*



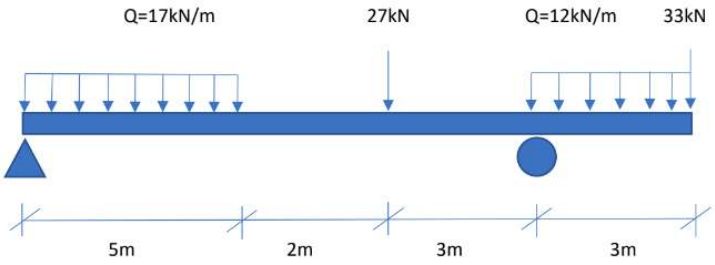
- *Uppgift 3) Beräkna stödreaktionerna*



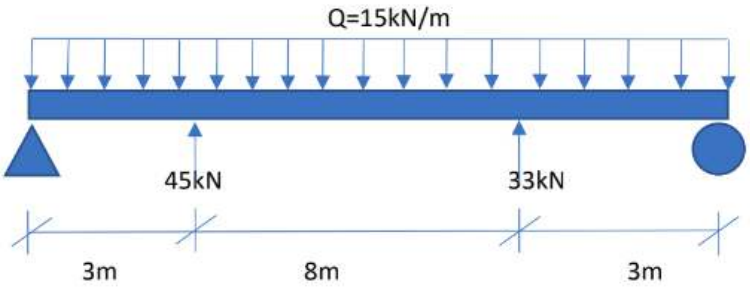
- # *Övningsblad 3*



- *Uppgift 2) Beräkna stödreaktionerna*



- *Uppgift 3) Beräkna stödreaktionerna*



Facit kapittel 1

- *Kapitel 1 uppgift 1*

$a)\ \frac{6}{7}$ $b)\ \frac{8}{9}$ $c)\ \frac{1}{2}$ $d)\ \frac{3}{5}$

$e)\ 1$ $f)\ \frac{9}{10}$ $g)\ \frac{11}{12}$ $h)\ \frac{5}{12}$

$i)\ \frac{4}{3}$ $j)\ \frac{11}{10}$ $k)\ \frac{1}{3}$ $l)\ \frac{-1}{8}$

- *Kapitel 1 uppgift 2*

$a)\ \frac{8}{25}$ $b)\ \frac{5}{3}$ $c)\ \frac{3}{7}$ $d)\ \frac{8}{5}$

$e)\ \frac{5}{3}$ $f)\ \frac{1}{2}$ $g)\ \frac{3}{7}$ $h)\ \frac{4}{3}$

$i)\ \frac{2}{3}$ $j)\ 5$ $k)\ \frac{9}{10}$ $l)\ \frac{7}{4}$

- *Kapitel 1 uppgift 3*

$a)\ \frac{1}{8}$ $b)\ \frac{1}{3}$ $c)\ \frac{1}{6}$ $d)\ 3$

$e)\ \frac{1}{6}$ $f)\ \frac{2}{9}$ $g)\ \frac{1}{36}$ $h)\ \frac{2}{9}$

$i)\ \frac{1}{6}$ $j)\ \frac{1}{12}$ $k)\ \frac{1}{10}$ $l)\ \frac{1}{64}$

- *Kapitel 1 uppgift 4*

$a)\ 0$ $b)\ \frac{8}{3}$ $c)\ \frac{9}{8}$ $d)\ -\frac{1}{2}$

$e)\ \frac{4}{3}$ $f)\ \frac{3}{10}$ $g)\ \frac{19}{6}$ $h)\ 0$

- *Kapitel 1 uppgift 5*

Facit kapittel 2

Kapitel 2, uppgift 1

a) $a^2 + 2ab + b^2$ b) $a^2 - 2ab + b^2$ c) $3a^2 + 6ab + 3b^2 + 2x$

d) $-2a^2 + 4ab - 2b^2$ e) $5 + b^2a^2 - 2b^2a + b^2$ f) $-3a^2 + 6ab - 3b^2 + 2x$

g) $a^2 - b^2$ h) $2b$ i) $2a^2 - 3ab + b^2$

Kapitel 2, uppgift 2

a) $4 - 2x$ b) $8 - 6x$ c) $4x^2 + x$

d) $7x + 4$ e) $4a + 7$ f) $2 - 8x$

g) $7x - y$ h) $-4y + 7x$ i) $4y - 3$

j) $4x + 10$ k) $x + 2$ l) $6 - 2a$

m) $x^2 + x$ n) $3x^2 + 2x - 5$ o) $2x^2$

Kapitel 2, uppgift 3

a) $x = 27$ b) $x = 46$ c) $x = 17$

d) $x = 7$ e) $x = 13$ f) $x = 7$

g) $x = 75$ h) $x = -6$ i) $x = 9$

j) $x = -15$ k) $x = 17$ l) $x = 4$

m) $x = 3$ n) $x = 7$ o) $x = 0{,}1$

p) $x = 0{,}5$ q) $y = -2$ r) $x = 3$

s) $x = 13$ t) $x = -54$ u) $a \neq 0,\ b = \pm\frac{\sqrt{30}}{a}$

- *Kapitel 2, uppgift 4*

a) $x_1 = -2, x_2 = -4$

b) 1) $x_1 = 2, x_2 = -3$

c) 1) $x_1 = 3, x_2 = -3$

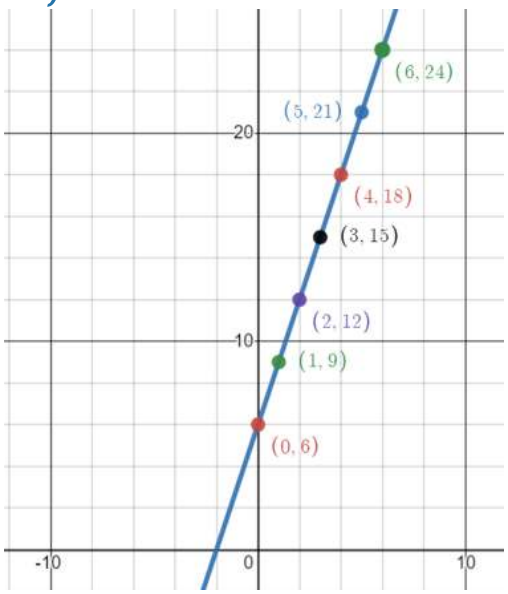
d) 1) $x_1 = 1, x_2 = -4,$

e) 1) $x_1 = -3, x_2 = -4,$

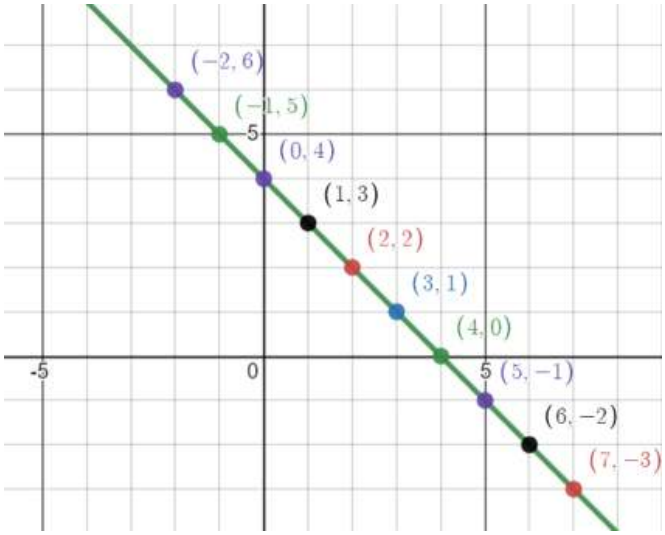
f) 1) $x_1 = 2, x_2 = -1,$

g) 1) $x_1 = 4, x_2 = 2,$

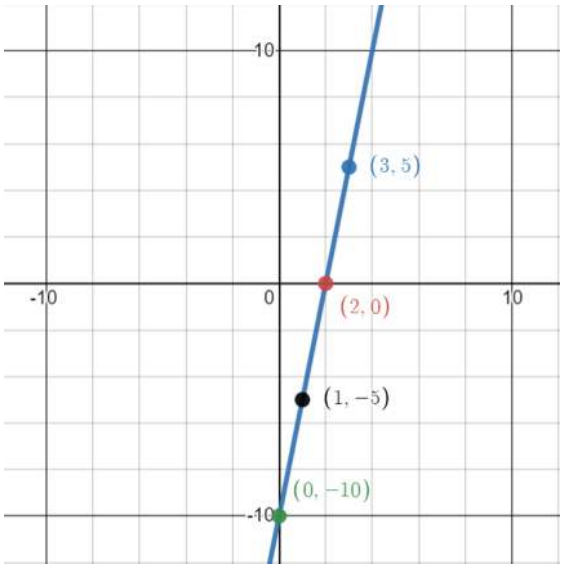
- *Facit kapittel 3, uppgift 1*
  - *a)*



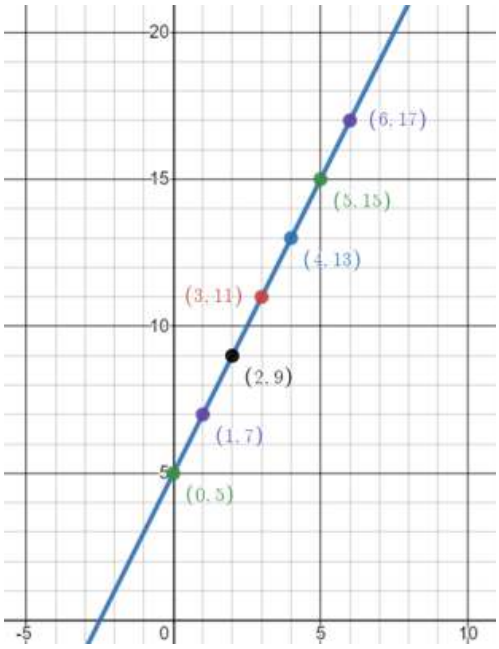
  - *b)*



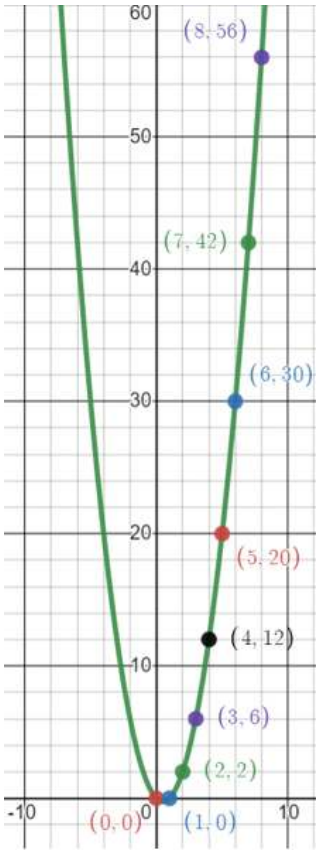
  - *c)*



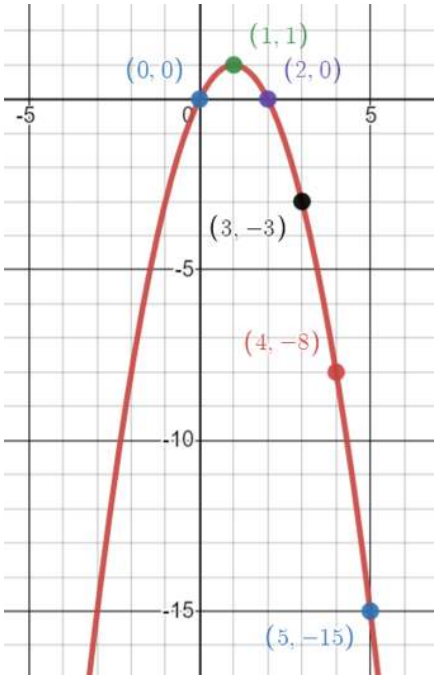
  - *d)*



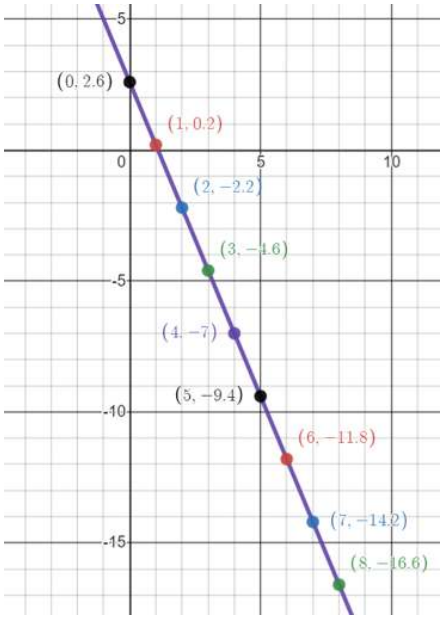
- *e)*


(8, 56)
(7, 42)
(6, 30)
(5, 20)
(4, 12)
(3, 6)
(2, 2)
(1, 0)
(0, 0)
60
50
40
30
20
10
-10
0
10

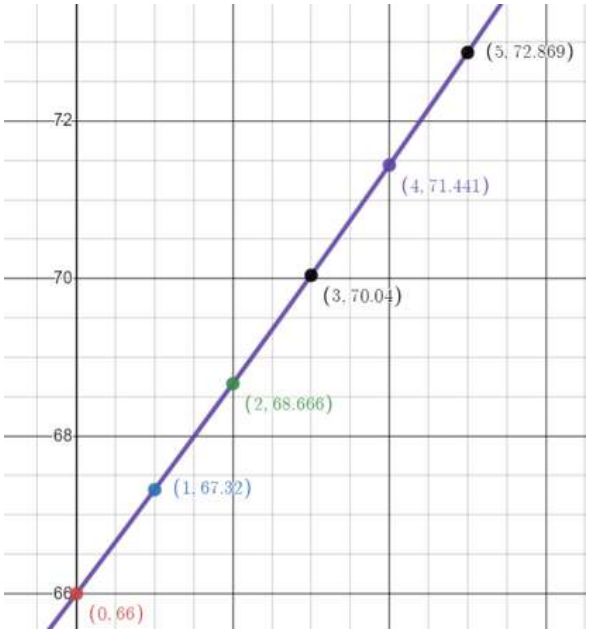
- *f)*


(1, 1)
(0, 0)
(2, 0)
(3, −3)
(4, −8)
(5, −15)
-5
0
5
-5
-10
-15

- *g)*


(0, 2.6)
(1, 0.2)
(2, −2.2)
(3, −4.6)
(4, −7)
(5, −9.4)
(6, −11.8)
(7, −14.2)
(8, −16.6)
-5
0
5
10
-5
-10
-15

- *h)*


(5, 72.869)
(4, 71.441)
(3, 70.04)
(2, 68.666)
(1, 67.32)
(0, 66)
72
70
68
66

Facit för Konstruktion, övningsblad 1

Uppgift 1

$R_A = 36{,}6\ kN, \qquad R_B = 32{,}5\ kN$

Uppgift 2

$R_A = 11{,}5\ kN, \qquad R_B = 38{,}5\ kN$

Uppgift 3

$R_A = 11{,}5\ kN, \qquad R_B = 39{,}5\ kN$

Uppgift 4

$R_A = 12{,}0\ kN, \qquad R_B = 28{,}0\ kN$

Uppgift 5

$R_A = 12{,}0\ kN, \qquad R_B = 33{,}0\ kN$

Uppgift 6

$R_A = 13{,}2\ kN, \qquad R_B = 30{,}8\ kN$

Facit för Konstruktion, övningsblad 2

Uppgift 1

$R_A = 67{,}5\ kN,$ $R_B = 29{,}65\ kN$

Uppgift 2

$R_A = 39{,}5\ kN,$ $R_B = 105{,}5\ kN$

Uppgift 3

$R_A = 100{,}1\ kN,$ $R_B = 75{,}9\ kN$